

9.10.

III. Funkce jedné proměnné

Známe pojmy:

funkční předpis = "vzoreček" $f(x)$

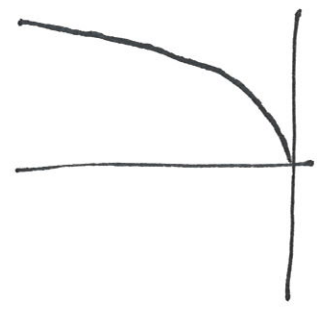
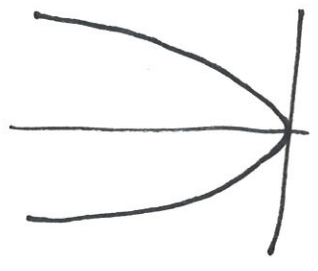
definiční obor = množina

$D_f = \{x \in \mathbb{R}; f(x) \text{ je definována}\}$

→ toto dohromady tvoří fci

$\underline{Př.}: f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$

$g(x) = x^2, x \in (0, +\infty)$

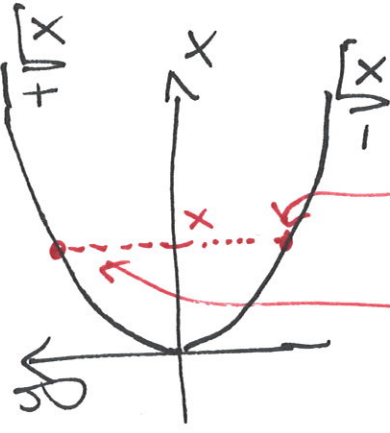


V praxi: je zadán fci -
předpis, má se najít
maximální D_f

$\underline{Př.}: f(x) = x^2 \rightarrow$
 $\rightarrow D_f = \mathbb{R}$

← f, g jsou dvě
různé fce se
stejným fci
předpisem

Pozor, fční předpis vždy
přirazuje každé hodnotě $x \in D_f$
jedinou hodnotu $f(x)$



$$Př: x = y^2$$

$$\Rightarrow y = \pm \sqrt{x}$$

Toto nezáadá

fci! Pro $x > 0$ máme

2 různé hodnoty: $\sqrt{x}, -\sqrt{x}$

Tedy v grafu fce nikdy nejsou
byť 2 body "nad sebou".

Def: $H_f = \text{obor hodnot fce } f$

= množina všech hodnot

$y \in \mathbb{R}$, kterých fce f nabývá

$$Př: f(x) = x^2 \dots H_f = \langle 0, +\infty \rangle$$

Pozn: D_f je vidět na ose x

H_f — " — y

Inverzní fce

Def: fce g je inverzní k fci f

polud:

$$y = g(x) \Leftrightarrow x = f(y)$$

$$\text{pro } \forall x \in D_g, \forall y \in D_f$$

$$\underline{Pr}: y = x^5 = g(x) / \sqrt[5]{}$$

$$f(y) = \sqrt[5]{y} = x \quad \uparrow \quad \text{pro } \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$$

Pozn: (A) je to vzájemný vztah:

g je inverzní k $f \Leftrightarrow f$ — " — ke g

Pr: fce "pátá mocnina" a "pátá odmocnina" jsou vzájemně inverzní

(B) Fce f má k sobě inverzní fci $\Leftrightarrow f$ je prostá (tež: vzájemně jednoznačná)

Def: fce f je prostá, pokud:

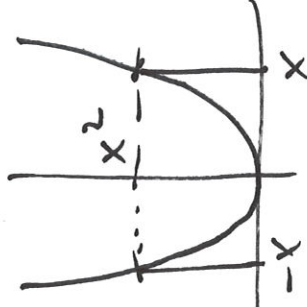
$$\forall y_1, y_2 \in D_f: y_1 \neq y_2 \Rightarrow f(y_1) \neq f(y_2),$$

tj. f je prostá, pokud dvěma různým hodnotám z D_f přiřazuje dvě různé fční hodnoty.

$$\underline{Pr}: f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$$

není prostá!

$$\text{pro } \forall x \neq 0: f(x) = f(-x)$$



a proto neexistuje inverzní fce k $x^2, x \in \mathbb{R}$

Proto zmenšíme def. obor na

$$(0, +\infty): \sqrt{x^2}$$

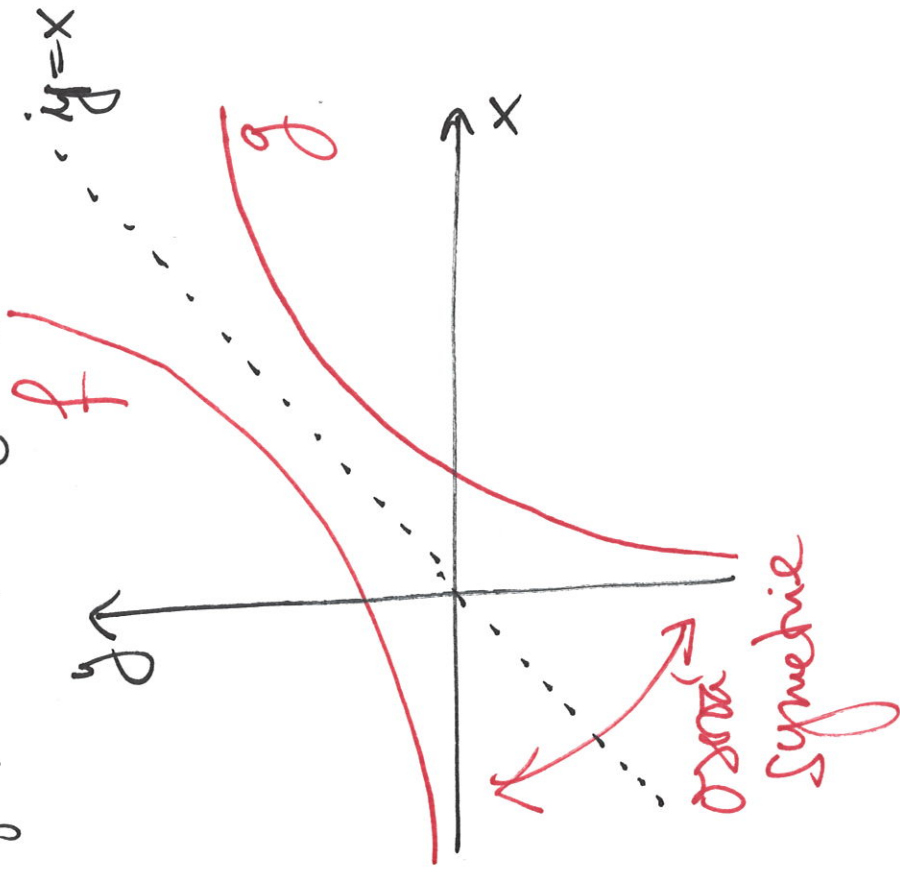
takže máme prostá je, má
tedy inverzní fci, a tice $\sqrt{x}$
druhou odmocninu



C) pokud jsou f i g vzájemně
inverzní, navzájem si "vyměří"
def. obor a obor hodnot, tj:

$$D_f = H_g, \quad D_g = H_f$$

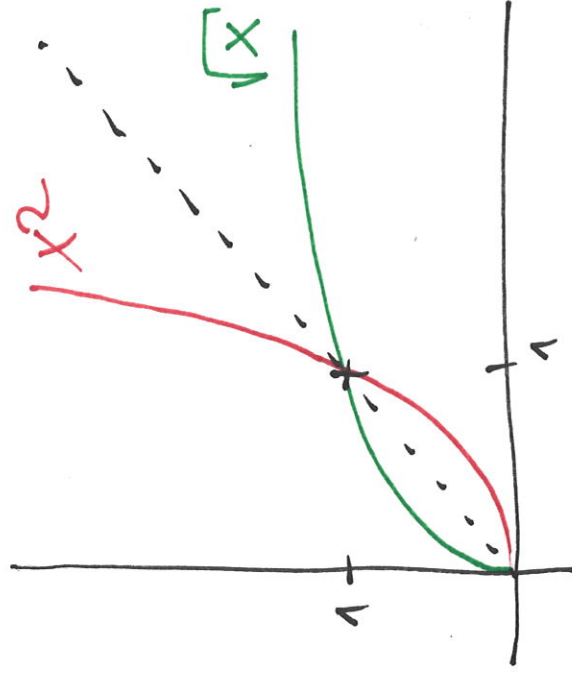
D) a dále, grafy inverzních
fcí jsou vzájemně souměrné
podle osy 1. a 3. koadrantu
(tj. podle přímky $y=x$)



Příklady na grafy inverzních fun-

(1) $f(x) = x^2, x \in (0, +\infty) = D_f = H_g$

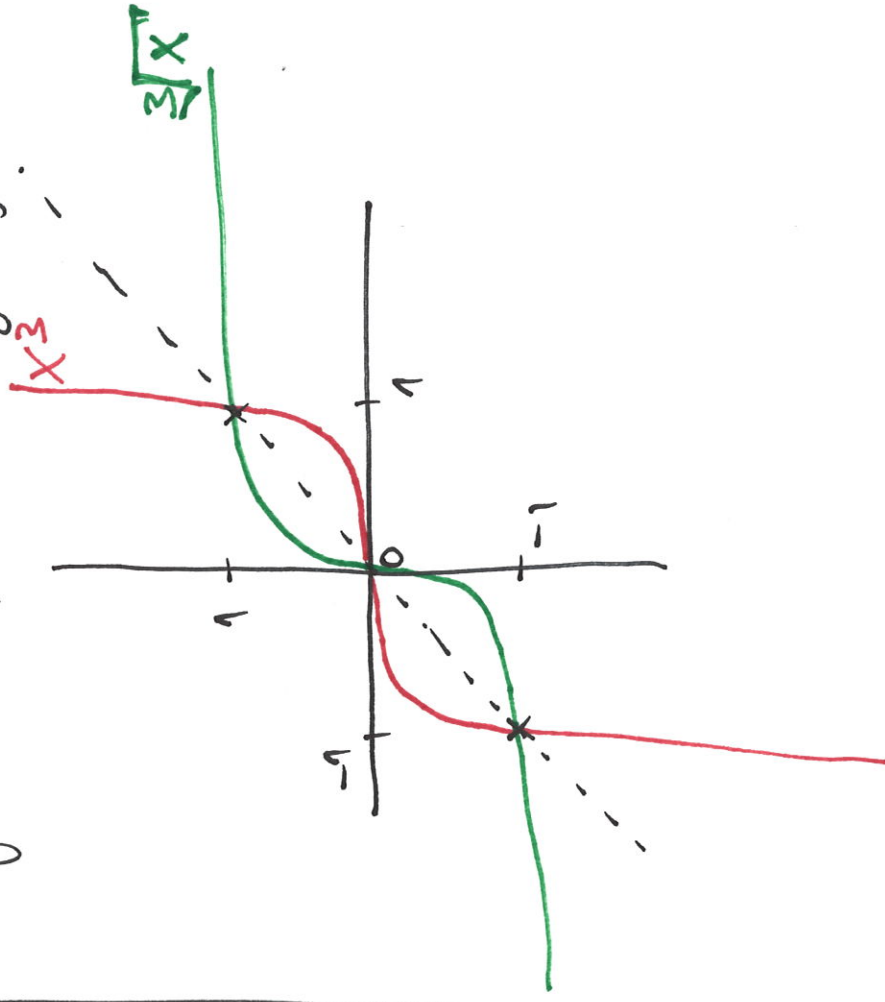
$\Downarrow$ $g(x) = \sqrt{x}, x \in (0, +\infty) = D_g = H_f$



Tedy grafem $\sqrt{x}$ je půlka paraboly (s vodorovnou osou)

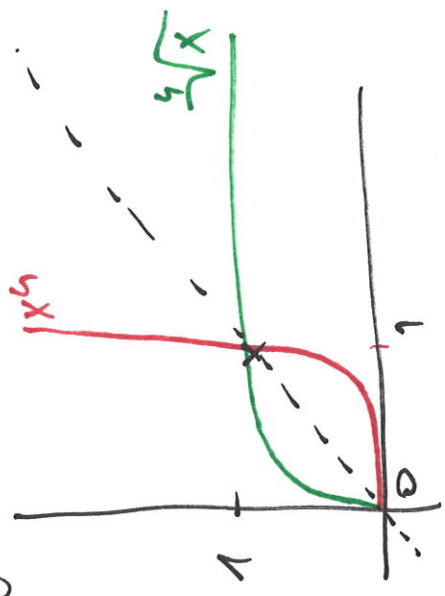
(2) $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R} = D_f = H_g$

$\Downarrow$ $g(x) = \sqrt[3]{x}, x \in \mathbb{R} = D_g = H_f$

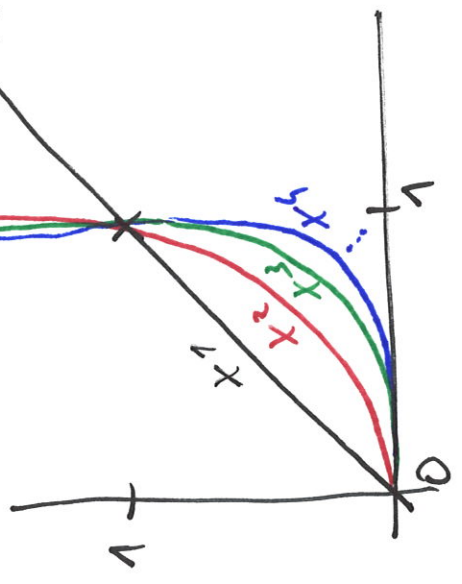


(3) $f(x) = x^4, x \in (0, +\infty)$

$g(x) = \sqrt[4]{x}, x \in (0, +\infty)$



Porovnať grafy rôznych mocnín:



(4) exponenciála e^x (s prirodzeným základom)

Dôležité vlastnosti:

1. $D_f = \mathbb{R}, H_f = \mathbb{R}_+$
(pretože $\forall x \in \mathbb{R} : e^x > 0$!)

2. $e^0 = 1, e^1 = e \doteq 2,71828$
(stačí $e \doteq 2,72$)

3. $\forall x, y \in \mathbb{R} : e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

4. e^x je prostá v celém $\mathbb{R}$,

t.j. $x \neq y \Rightarrow e^x \neq e^y$

$\Rightarrow$ existuje inverzní fce $\ln x$

5. e^x je rostoucí v $\mathbb{R}$,

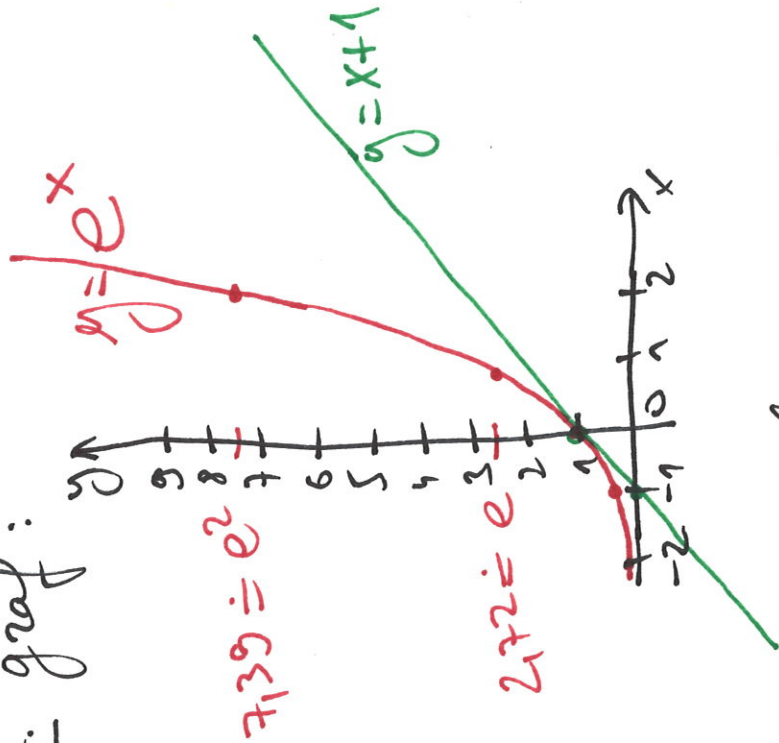
t.j. $x < y \Rightarrow e^x < e^y$

6. $\forall x \in \mathbb{R} : e^x \geq x+1$

a rovnost platí pouze

pro $x=0 : e^0 = 1 = 0+1$

7. graf:



Pozn: přímkou $y = x+1$ je
tečnou ke grafu pro e^x
v bodě 0.

(5) přirozený logaritmus $\ln x$

je inverzí fce k e^x , tj.

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$$

pro $x \in \mathbb{R}_+$, $y \in \mathbb{R}$

Důležité vlastnosti:

1. $D_f = \mathbb{R}_+$, $H_f = \mathbb{R}$

Tedy do logaritmu lze dosazovat
pouze kladná čísla ??

(Hodnoty $\ln x$ jsou ale libovolně reálné.)

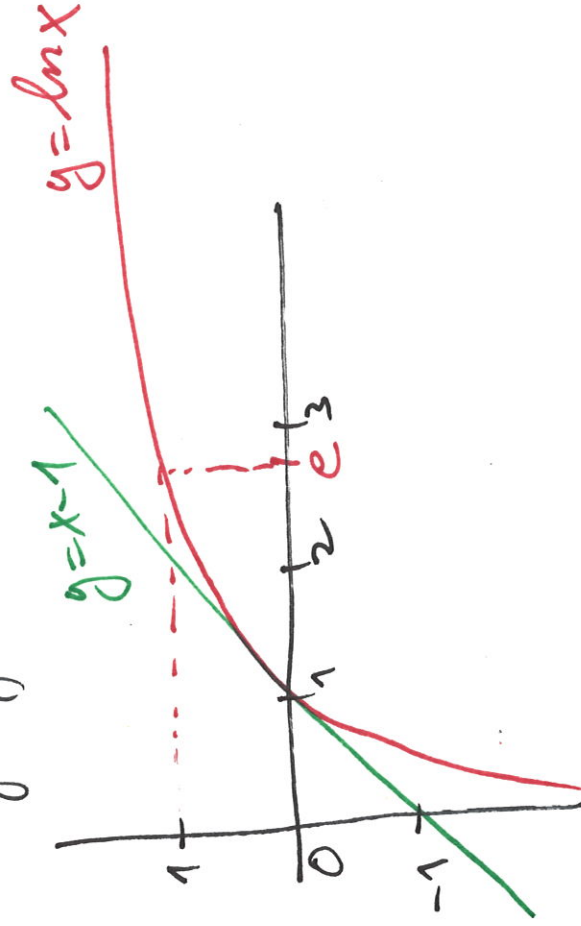
2. $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$

3. $\forall x, y \in \mathbb{R}_+ : \ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$

4. $\ln x$ je také rostoucí fce,
 $0 < x < y \Rightarrow \ln x < \ln y$

5: $\forall x \in \mathbb{R}_+ : \ln x \leq x-1$
a rovnost pouze pro $x=1$
 $\ln 1 = 0 = 1-1$

6: graf vzájemně symetrický
7 grafu e^x :



Def: $a^x = e^{(x \cdot \ln a)}$

Vypočtení: $e^{(x \cdot \ln a)} = (e^{\ln a})^x =$
 $= a^x$ (protože $e^{\ln a} = a$)

Má podobné vlastnosti jako e^x ,

tj. $D_f = \mathbb{R}, H_f = \mathbb{R}_+$,

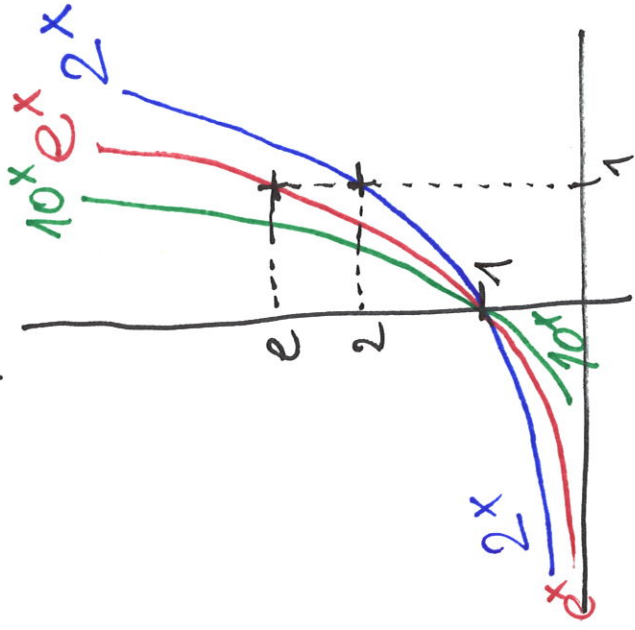
$a^0 = 1, a^1 = a, a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

Pro $a > 1$ je a^x rostoucí

pro $a \in (0, 1)$ je a^x klesající

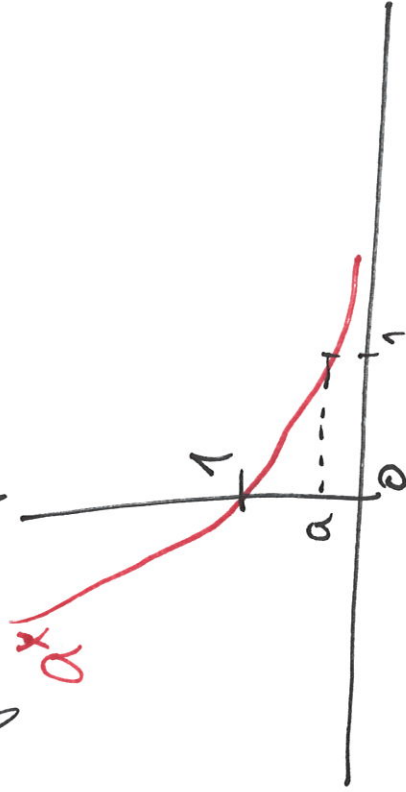
(6) exponenciála s obecným
základem a^x , základ $a > 0, a \neq 1$
(pěkně)

Graf a^x pro $a > 1$:



Pro $1 < a < b$ roste b^x
rychleji než a^x .

Graf a^x pro $a \in (0, 1)$:



(7) logaritmus o omejním

základem: $\log_a x$,

základ $a > 0$, $a \neq 1$, je to

inverzní ke a^x : $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$

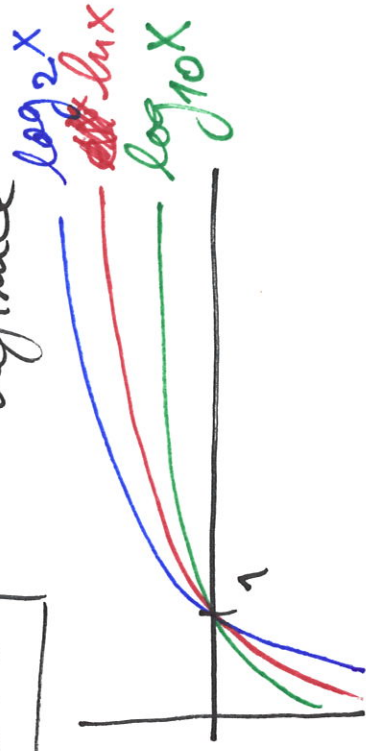
$D_f = \mathbb{R}_+$, $H_f = \mathbb{R}$, $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a (x) + \log_a (y)$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

- dříve mohl
definice

Graf ($a > 1$):



Graf ($a \in (0, 1)$):

